УДК 517.956

Е. А. Калита

# О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОРДЕСА

Для нелинейного эллиптического уравнения $A(x, D^2 u) = 0$, удовлетворяющего вырожденному условию Кордеса

$$|\xi_{ii} - A(x, \xi)|^2 \leqslant \xi_{ij}^2,$$

доказывается разрешимость в вязком смысле задачи Дирихле. Полученное решение принадлежит $C^{1/2} \cap W_2^1$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$,— ограниченная гладкая область, средняя кривизна $\partial\Omega$ положительна (отделена от нуля) в направлении внутренней нормали. В $\Omega$ рассматривается задача Дирихле

$$A(x, D^2u) = 0; \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = g. \tag{2}$$

Функция $A(x, \xi)$ удовлетворяет аналогу вырожденного условия Кордеса: $\exists\, \varkappa(x) > 0$ такое, что

$$|\xi_{ii} - \varkappa(x) A(x, \xi)|^2 \leqslant \xi_{ij}^2, \tag{3}$$

по повторяющимся индексам идет суммирование. Типичный пример вырождения, допускаемого (3), дает оператор $\Delta - d^2/dx_1^2$. Для линейного уравнения

$$A_{ij}(x) D_{ij}^2 u = 0 \tag{4}$$

с измеримыми ограниченными коэффициентами (3) равносильно вырожденному условию Кордеса

$$(A_{ii}(x))^2 \geqslant (n-1) A_{ij}^2(x). \tag{5}$$

Действительно,

$$\inf_{\varkappa} \sup_{|\xi|=1} (\xi_{ii} - \varkappa A_{ij}\xi_{ij})^2 = \inf_{\varkappa} (\delta_{ij} - \varkappa A_{ij})^2 =$$

$$= \inf_{\varkappa} (n - 2\varkappa A_{ii} + \varkappa^2 A_{ij}^2) = n - (A_{ii})^2/A_{ij}^2,$$

и (3) принимает вид $n - (A_{ii})^2/A_{ij}^2 \leqslant 1$, что совпадает с (5). Далее для краткости полагаем, что нормирующий множитель $\varkappa \equiv 1$.

Уравнения вида (4) при невырожденном условии Кордеса $\exists\, \delta \in (0; 1)$ такое, что

$$(A_{ii})^2 \geqslant (n - 1 + \delta) A_{ij}^2,$$

рассматривались многими авторами, например [1, 2]. Интерес к ним обусловлен тем, что условие Кордеса позволяет получить априорную оценку решения в пространствах Соболева $H^2$ и в пространствах Гельдера $C^\alpha$, $\alpha$ зависит от $\delta$. В частности, $\alpha > 1$ при $\delta > \frac{n-2}{2n-1}$, и $\alpha > \frac{1}{2}$ при всех $\delta > 0$.

В данной работе устанавливается разрешимость в вязком смысле задачи Дирихле (1), (2). Полученное решение принадлежит $C^{\frac{1}{2}} \cap H^1(\Omega)$, а также $H^1(S(x_0, R))$ для любой сферы $S(x_0, R)$.

**Определение** [3]. Функция $u \in C(\Omega)$ называется (вязким) решением уравнения (1), если для любой функции $\varphi \in C^2$ и точки $x_0 \in \Omega$

1) из $A(x, D^2\varphi) > 0$ в окрестности $x_0$ следует, что $u - \varphi$ не имеет локального минимума в $x_0$;

2) из $A(x, D^2\varphi) < 0$ в окрестности $x_0$ следует, что $u - \varphi$ не имеет локального максимума в $x_0$.

Далее предполагаем, что функция $A(x, \xi)$ удовлетворяет (3) с $\varkappa \equiv 1$, измерима по $x$, липшицева по $\xi$ равномерно по $x$, $\xi$, выпукла (или вогнута) по $\xi$ при почти всех $x$, а также

$$A(x, \xi + \eta) - A(x, \xi) \geqslant 0; \tag{6}$$

$$A(x, \xi + \gamma I) - A(x, \xi) \geqslant \beta(\gamma) > 0 \quad \forall\ \gamma > 0, \tag{7}$$

где $\eta$ — произвольная неотрицательно определенная симметрическая матрица, $I = (\delta_{ij})$ — единичная матрица, $\beta$ — неубывающая функция на положительной полуоси. Для линейного уравнения (4) условия (6), (7) следуют из (5). Действительно, (5) равносильно (3), откуда

$$2\eta_{ii} A(x, \eta) \geqslant (\eta_{ii})^2 - \eta_{ij}^2.$$

Если $\eta$ — симметрическая матрица, находим

$$2\Big(\sum_i \eta_i\Big) A(x, \eta) \geqslant \sum_{i,j;\, i \neq j} \eta_i \eta_j,$$

где $\eta_i$ — собственные числа матрицы $\eta$. Если $\eta$ неотрицательно определена, отсюда следует (6). Если $\eta = \gamma I$, отсюда следует (7) с $\beta = \frac{n-1}{2}\gamma$.

Введем функциональные пространства с нормами

$$\| u;\ \tilde{H}_a(\Omega) \|^2 = \sup_{x_0} \int_{\Omega} (|D_r u|^2 r^{a-2} + u^2)\, dx + \sup_{x_0, R} R^{a-1} \int_{S(x_0, R) \cap \Omega} |D_\tau u|^2 dS,$$

$$\| g;\ H_a^2(\partial\Omega) \|^2 = \sup_{x_0} \int_{\partial\Omega} (|D^2 g|^2 r^a + g^2)\, dS,$$

$$\| g;\ H_{\ln}^2(\partial\Omega) \|^2 = \sup_{x_0} \int_{\partial\Omega} \left( |D^2 g|^2 \ln \frac{d}{r} + g^2 \right) dS,$$

где $a \in (2-n;\ 0)$, $r = |x - x_0|$, $d > \operatorname{diam} \Omega$, $D_r$ — дифференцирование по $r$, $D_\tau$ — касательное дифференцирование на сфере $S(x_0,\ R) = \{x : |x - x_0| = R\}$, $Dg$ понимается как производная на многообразии.

Основной результат работы составляет следующее утверждение.

**Теорема.** Если $g \in H^2(\partial\Omega)$, то задача (1), (2) имеет решение $u \in \tilde{H}_{3-n,\mathrm{loc}} \cap H^1(\Omega)$. Дополнительно, если $g \in H_a^2(\partial\Omega)$, $3 - n \leqslant a < 0$, то $u \in \tilde{H}_a(\Omega)$, если $g \in H_{\ln}^2(\partial\Omega)$, то $u \in \tilde{H}_0(\Omega)$.

*Замечание 1.* Справедливо вложение $\tilde{H}_a \subset C^\alpha$, $\alpha = 2 - \frac{n+a}{2}$, $a \in (2-n;\ 4-n)$. Поэтому в теореме $u \in C^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, а также $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ при $0 < \alpha < 1/2$, $g \in H_{4-n-2\alpha}^2(\partial\Omega)$, $n \geqslant 4$; $u \in C^{\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$ при $n = 3$, $g \in H_{\ln}^2(\partial\Omega)$. Действительно, для произвольного шара $B_R = \{x : |x - x_0| < R\}$

$$R^{a-2} \int_{B_R} |Du|^2 dx \leqslant \int_{B_R} |D_r u|^2 r^{a-2} dx + R^{a-2} \int_0^R \int_{S_r} |D_\tau u|^2 dS dr \leqslant$$

$$\leqslant \left( 1 + R^{a-2} \int_0^R r^{1-a} dr \right) \| u;\ \tilde{H}_a(\Omega) \|^2 \leqslant \left( 1 + \frac{1}{2-a} \right) \| u;\ \tilde{H}_a(\Omega) \|^2,$$

и по вложению пространств Морри получаем $\tilde{H}_a \subset C^\alpha$ с указанным соотношением индексов.

Получим априорную оценку для решения задачи (1), (2), имеющих вторые производные.

**Лемма.** Пусть $u \in C^2(\bar{\Omega})$ — классическое решение (1), (2). Тогда

$$\int_{\Omega} (|D_r u|^2 + (a + n - 3)|Du|^2) r^{a-2} dx + \sup_R R^{a-1} \int_{S(x_0, R) \cap \Omega} |D_\tau u|^2 dS \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{\partial\Omega} \left( \frac{|\Delta g|^2}{-ak} + r^{-1} |Dg|^2 \right) r^a dS, \quad a < 0; \tag{8}$$

$$\mathrm{idem}|_{a=0} \leqslant 2 \int_{\partial\Omega} \left( \frac{|\Delta g|^2}{k} \ln \frac{d}{r} + r^{-1} |Dg|^2 \right) dS, \tag{9}$$

где $r = |x - x_0|$; $d > \max\{r : x \in \partial\Omega\}$; $x_0$ — произвольная точка $k(x) > 0$ — средняя кривизна $\partial\Omega$ в направлении внутренней нормали.

Доказательство. Записывая уравнение (1) в виде $\Delta u = \Delta u - A(x, D^2 u)$, по (3) получаем $|\Delta u| \leqslant |D^2 u|$. Поэтому

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^2 \omega dx \leqslant \int_{\Omega} |D^2 u|^2 \omega dx, \tag{10}$$

где $\omega(x)$ — произвольный неотрицательный вес. После интегрирования по частям получаем

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^2 \omega dx = \int_{\Omega} (|D^2 u|^2 \omega + D_i u D_j u D_{ij}^2 \omega - |Du|^2 \Delta\omega)\, dx +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} ((\partial_\nu u \Delta u - Du \partial_\nu Du)\, \omega + |Du|^2 \partial_\nu \omega - \partial_\nu u Du D\omega)\, dS,$$

где $\partial_\nu$ — дифференцирование по внешней нормали, $DuDv = \sum_i D_i u D_i v$.

Для граничного интеграла находим

$$\int_{\partial\Omega} \cdots = \int_{\partial\Omega} ((n-1)\, k\, |\partial_\nu u|^2 + 2\partial_\nu u \Delta g \omega + |Dg|^2 \partial_\nu \omega)\, dS,$$

и поскольку $k > 0$,

$$|2\partial_\nu u \Delta g| \leqslant (n-1)\, k\, |\partial_\nu u|^2 + \frac{|\Delta g|^2}{(n-1)\, k}.$$

В полярных координатах $(r, \theta)$ с полюсом $x_0$ при $\omega = \begin{cases} r^a, & r > R \\ R^a, & r \leqslant R \end{cases}$, $R > 0$, $a < 0$, имеем

$$\int (D_i u D_j u D_{ij}^2 \omega - |Du|^2 \Delta\omega)\, dx = -a \int_{r>R} ((n-1)\, |D_r u|^2\, r^{a-2} +$$

$$+ (a+n-3)\, |D_\theta u|^2\, r^{a-4})\, dx - aR^{a-3} \int_{r=R} |D_\theta u|^2\, dS,$$

а при $\omega = \begin{cases} \ln(d/r), & r > R \\ \ln(d/R), & r \leqslant R \end{cases}$ имеем

$$\text{idem} = \int_{r>R} ((n-1)\, |D_r u|^2\, r^{-2} + (n-3)\, |D_\theta u|^2\, r^{-4})\, dx + R^{-3} \int_{r=R} |D_\theta u|^2\, dS$$

(напомним, $|Du|^2 = |D_r u|^2 + r^{-2}\, |D_\theta u|^2$). Применяя полученные оценки в (10), получаем (8), (9).

Доказательство теоремы. Положим

$$A_m(x, \xi) = \frac{1}{m}\, \xi_{ii} + \int A(x+y, \xi+\eta)\, \sigma_m(y, \eta)\, dy d\eta,$$

$\sigma_m \in \overset{0}{C}{}^\infty$ — неотрицательная радиальная функция, $\operatorname{supp} \sigma_m \subset \left\{(y, \eta) : |y| < \frac{1}{m},\ |\eta| < \frac{1}{m}\right\}$, $\int \sigma_m dy d\eta = 1$, вне $\Omega$ полагаем $A(x, \xi) = \xi_{ii}$. Функция $A_m$ гладкая по совокупности переменных, выпукла (или вогнута) по $\xi$, и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности:

$$\frac{\partial A_m(x, \xi)}{\partial \xi_{ij}}\, \zeta_i \zeta_j = \lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma}\, (A_m(x, \xi_{ij} + \gamma \zeta_i \zeta_j) - A_m(x, \xi)) =$$

$$= \frac{1}{m}\, |\zeta|^2 + \lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma} \int (A(x+y, \xi_{ij} + \gamma \zeta_i \zeta_j + \eta_{ij}) -$$

$$- A(x+y, \xi+\eta))\, \sigma_m dy d\eta \geqslant \frac{1}{m}\, |\zeta|^2,$$

где последнее неравенство следует из (6). По теореме 17.18′ [4, с. 430] (оценки роста производных функции $A_m$, требуемые в условии теоремы, в данном случае тривиальны) задача Дирихле

$$A_m(x, D^2 u) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = g_m$$

имеет решение $u_m \in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$, если $g_m \in C^3(\partial\Omega)$. Пусть последовательность $g_m$ сходится к $g$ при $m \to \infty$ в норме $H^2(\partial\Omega)$. Тогда по лемме функции $u_m$ равномерно ограничены в $\tilde H_{3-n,\mathrm{loc}} \cap H^1(\Omega)$. Поскольку вложение $H^1$ в пространства Бесова $B_2^s$ при $s < 1$ компактно, найдется подпоследовательность $u_{m_j}$, сходящаяся в $B_2^s(\Omega)$, $s < 1$, к некоторой функции $u$. При $s > 1/2$ функции из $B_2^s(\Omega)$ имеют следы на границе, принадлежащие $B_2^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, поэтому $u|_{\partial\Omega} = g$. По замечанию 1 $\tilde H_{3-n,\mathrm{loc}}(\Omega) \subset C^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, так что функции $u_m$ равностепенно непрерывны внутри $\Omega$. По теореме Арцела найдется подпоследовательность последовательности $u_{m_j}$, сходящаяся равномерно внутри $\Omega$. Следовательно, предельная функция $u \in H_{3-n,\mathrm{loc}} \cap H^1(\Omega)$.

Проверим, что $u$ — решение (1). Пусть $\varphi \in C^2$, $A(x, D^2\varphi) > 0$ в окрестности $x_0 \in \Omega$. Для функции $\psi = \varphi + \gamma x^2$, $\gamma > 0$, по (7) имеем $A(x, D^2\psi) \geqslant \beta(\gamma)$. Далее,

$$A_m(x, D^2\psi) \geqslant \int A(x+y, D^2\psi(x+y))\,\sigma_m dy d\eta - \frac{1}{m}|\Delta\psi(x)| -$$

$$-\int |A(x+y, D^2\psi(x)+\eta) - A(x+y, D^2\psi(x+y))|\,\sigma_m dy d\eta \geqslant$$

$$\geqslant \beta(\gamma) - \frac{1}{m}\max|\Delta\psi| - \omega_A\left(\frac{1}{m} + \omega_\psi\left(\frac{1}{m}\right)\right) > 0$$

при достаточно больших $m$, где $\omega_A$ — модуль непрерывности $A$ по $\xi$, $\omega_\psi$ — модуль непрерывности $D^2\psi$. Оператор $A_m$ эллиптичен и определен при всех $x$ (в отличие от $A$, определенного при почти всех $x$), поэтому для него справедлив принцип сравнения для гладких функций, и функции $u_m - \psi$ не имеют минимума в окрестности $x_0$ при достаточно больших $m$. Поскольку $u_{m_j}$ сходятся к $u$ равномерно внутри $\Omega$, $u - \psi$ не имеет минимума в окрестности $x_0$. При $\gamma \to 0$ получаем, что то же справедливо для $u - \varphi$. Условие 2) из определения решения проверяется точно так же.

Если $g \in H^2_a$ или $H^2_{\ln}$, доказательство разрешимости в пространстве $\tilde{H}_{3-n,\mathrm{loc}} \cap \tilde{H}_a(\Omega)$ полностью аналогично. Оценка $\int |Dg|^2 r^{a-1} dS$ через норму $g$ в $H^2_a$ следует из неравенства Харди.

*Замечание 2.* Как следует из доказательства, можно допустить, чтобы средняя кривизна $\partial\Omega$ обращалась в ноль. В этом случае от граничной функции $g$ нужно требовать равномерную по $x_0$ ограниченность правых частей в (8), (9) вместо $g \in H^2_a$, $g \in H^2_{\ln}$.

*Замечание 3.* В случае когда $\Omega$ — шар, задача (1), (2) разрешима в $\tilde{H}_{3-n,\mathrm{loc}} \cap H^1(\Omega)$ для $g \in H^1(\partial\Omega)$. Действительно, полагая в доказательстве леммы $\omega(x) = \begin{cases} \ln(\rho/r), & R < r < \rho, \\ \ln(\rho/R), & r \leqslant R, \end{cases}$ $r = |x|$, $\Omega = \{x : |x| > \rho\}$, и учитывая $\omega = 0$ на $\partial\Omega$, получаем априорную оценку $u$ в $H^1(\Omega)$ через $\|g; H^1(\partial\Omega)\|$. Подставляя в (10) $\omega\varphi$ вместо $\omega$, где $\varphi \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ вне некоторой окрестности $\partial\Omega$, получаем оценку $u$ в $\tilde{H}_{3-n,\mathrm{loc}}$ через $\|u; H^1(\Omega)\|$.


1. *Cordes H. O.* Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations // Proc. Symp. Pure Math.— 1961.— **4**.— P. 157—166.
2. *Talenti G.* Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili // Ann. Mat. Pura Appl.— 1965.— **69**.— P. 285—304.
3. *Caffarelli L.* Elliptic second order equations // Rend. Sem. Mat. Fis. Milano.— 1988.— **58**.— P. 253—284.
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.— М. : Наука, 1989.— 464 с.



Ин-т прикл. математики и
механики АН Украины, Донецк



Получено 21.11.91